многосвязной области/ Казанск. ун-т, 1999. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.05.99, N 1703-В99.

Ф. Г. Авхадиев (Казань)

ОСОБЕННОСТИ СФЕРИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Для функций $f : S^n \to C$ и параметров $\alpha \in C$ и $x \in R^{n+1} \setminus S^n$ рассмотрим сферические потенциалы

$$p_{n,\alpha}(x, f) = \int_{S_n} \frac{f(y)d\sigma_y}{|x-y|^{n+\alpha}}, \quad (1)$$

где $S^n = \{y \in R^{n+1} : |y| = 1\}$, $d\sigma_y$ — обычная мера Лебега на сфере S^n, $\omega_n = \int_{S_n} d\sigma_y = 2\pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$. Асимптотическое поведение (1) при $|x| \to 1$ хорошо известно. В частности, если $f \in L^\infty(S^n)$ и $\operatorname{Re}\alpha < 0$, то интеграл (1) ограничен. Если $f \in L^\infty(S^n)$ и $\operatorname{Re}\alpha > 0$, то (1) имеет особенность порядка $O(|1-|x||^{-\operatorname{Re}\alpha})$. Мы находим формулу, явно выделяющую эту особенность.

Идею дает тривиальный случай $n = 0$. Для $S^0 = \{-1, 1\}$ аналог (1)

$$p_{0,\alpha}(x, f) = \frac{f(-1)}{|x+1|^\alpha} + \frac{f(1)}{|x-1|^\alpha} \quad (x \in R \setminus S^0)$$

удовлетворяет тождеству

$$p_{0,\alpha}(x, f) = |1-x^2|^{-\alpha} p_{0,-\alpha}(x, f \circ T_0), \quad (2)$$

где $T_0 : S^0 \to S^0$ является инволюцией, т.е. $T_0(\pm 1) = \mp 1$.

Существует аналог формулы (2) для $n \geq 1$.

Теорема. *Пусть* $n \geq 1$, $f \in L^1(S^n)$. *Для любых* $\alpha \in C$ *и* $x \in R^{n+1} \setminus S^n$, $|x| \neq 0$,

$$\int_{S^n} \frac{f(y)d\sigma_y}{|x-y|^{n+\alpha}} = |1-|x|^2|^{-\alpha} \int_{S^n} \frac{(f \circ T_{n,x})(y)d\sigma_y}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad (3)$$

где $T_{n,x}$ — *инверсия сферы* S^n *относительно сферы*

$$S_x^{n-1} = \{y \in S^n : |y-x| = \sqrt{|1-|x|^2|}\}.$$

Геометрически $T_{n,x} = P_x^{-1} \circ J_\rho \circ P_x$, где P_x — стереографическая проекция S^n с "северным полюсом" в точке $e_1 = x/|x|$ на плоскость $\mathrm{R}_x^n = \{\eta \in \mathrm{R}^{n+1} : \eta_1 = 0\}$, J_ρ — инверсия R_x^n относительно сферы $|\eta| = \rho = \sqrt{\frac{1+|x|}{|1-|x||}}$. Отметим, что в ортогональном базисе с $e_1 = x/|x|$ инверсия $\xi = T_{n,x}(\eta)$ определяется формулами

$$\xi_1 = \frac{2|x| - (1+|x|^2)\eta_1}{1+|x|^2 - 2|x|\eta_1}, \quad \xi_k = \sqrt{\frac{1-\xi_1^2}{1-\eta_1^2}}\,\eta_k \quad (2 \le k \le n+1). \quad (4)$$

Явные формулы (3) и (4) позволяют легко обосновать свойства сферических потенциалов, аналогичные свойствам интеграла Пуассона.

Следствие 1. *Если* $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $f \in L^\infty(S^n)$, *и* f *непрерывна в точке* $y_0 \in S^n$, *то*

$$\lim_{|x|\neq 1, x\to y_0} |1-|x|^2|^\alpha p_{n,\alpha}(x,f) = 2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+n}{2})} f(y_0). \quad (5)$$

Действительно, пусть $|x| \neq 1$, $q > 1$ и $(n - \mathrm{Re}\,\alpha)\frac{q}{q-1} < n$. Из (4) следует, что

$$\lim_{x\to y_0} f(T_{n,x}(y)) = f(y_0) \qquad (\forall y \in S^n \setminus \{y_0\}).$$

Следовательно, по теореме Лебега о мажорированной сходимости имеем

$$\lim_{x\to y_0} \int_{S^n} |f(T_{n,x}(y)) - f(y_0)|^q\, d\sigma_y = 0. \quad (6)$$

Пользуясь (3) и неравенством Гельдера, можем написать

$$||1-|x|^2|^\alpha p_{n,\alpha}(x, f - f(y_0))| \le \mathrm{const}\cdot \|f\circ T_{n,x} - f(y_0)\|_q. \quad (7)$$

Формула (5) следует из (6) и (7).

Следствие 2. *Пусть* $1 < q$, $1/q + 1/t = 1$, $f \in L^q(S^n)$, $\|f\|_q = (\int_{S^n} |f(y)|^q d\sigma_y)^{1/q}$. *Если* $\beta = \mathrm{Re}\,\alpha + n/q > 0$, *то*

$$\sup_{\|f\|_q=1} |1-|x|^2|^\beta |p_{n,\alpha}(x,f)| = \left(\int_{S^n} \frac{d\sigma_y}{||x|e_1 - y|^{n-\beta t}}\right)^{1/t}. \quad (8)$$

Для доказательства следствия 2 мы пользуемся неравенством Гельдера и нашей теоремой.

В силу хорошо известных свойств потенциалов Рисса интеграл из (8) имеет разве лишь три критических точки $|x| = 0$, $|x| = 1$ и $|x| = \infty$. Следовательно, нетрудно вычислить максимальные и минимальные значения интеграла из (8) для $0 \le |x| \le 1$ или $1 \le |x| \le \infty$. Например, если $n \ge 2$ и $n - \beta t \in [0, n-1)$, то из (8) мы получаем точную оценку

$$|1 - |x|^2|^\beta |p_{n,\alpha}(x, f)| \le \omega_n^{1/t} \|f\|_q. \tag{9}$$

Равенство в (9) будет в том случае, когда $|x| = 0$ и $f(y) = \mathrm{const}$.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00366) и грантом DFG.

Ю. Р. Агачев (Казань)

К ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучается задача оптимизации по порядку точности (см., напр., в [1]) прямых методов решения двух классов слабо сингулярных интегральных уравнений Фредгольма II рода.

Рассмотрим уравнение вида

$$x(t) + \int_a^b \mu(|t-s|)h(t,s)x(s)\,ds = y(t), \; a \le t \le b, \tag{1}$$

где $h(t,s)$ и $y(t)$ — известные непрерывные функции, $\mu(\tau)$ — известная функция, интегрируемая по Лебегу в промежутке $[0, b-a]$, а $x(t)$ — искомая.

Пусть $H_\omega(M)$ означает обобщенный класс функций Гёльдера, определенных на $[a,b]$ и ограниченных там по модулю положительной постоянной $M > 0$. Первый класс E_1 уравнений (1) задается соотношениями $h(\text{по } t) \in H_{\omega_1}(M_1)$, $y \in H_{\omega_2}(M_2)$, а второй класс E_2 представляет собой подкласс E_1, когда дополнительно